Title	(1,1,・・・・,1)型有限Able群ノsubgroupノ相互関係
Author(s)	木下, 佳壽
Citation	全国紙上数学談話会. 2(2) p.69-p.76
Issue Date	1946-12-18
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75152
rights	
Note	

17 ~~13.~~ (1. 1, …, 1) 型 Abel 群ノ subgroup ノ相互関係 (II)

木下信壽 (阪大)

(1946. XII. 10 受付)

order p^n ノ Abel 群 G ハ Type ガ (1, 1, …… 1) デアルトヲ order p^{n-1} ノ subgroup ガ Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c} E_i & 0 \\ \hline \lambda_1 \ \lambda_i & 0 \\ \hline 0 & E_{n-1-i} \end{array}\right)$$

[之ヲ ${}_n l_i(\lambda)$ トカク $n-(n-i)$ 型デアル]

$(i = 0, 1, 2, \cdots n)$

[ミ $\lambda_k = 1$ ヌハ $n-1-i$ ニツキ, $K = 0$ ノトキ, E_k ノ位置スル k 個ノ行及列ヲ抹消シテ出来タ Matrix ヲ意味スルモノトスル。例ヘバ ${}_n l_0(\lambda)$ ハ $\begin{pmatrix} n \cdots 0 \\ E_{n-1} \end{pmatrix}$]

デキナレルコトハ、$\mathfrak{A}_i(\lambda)$ ガ p^{n-1} 次ノ G ノ subgroup ヘノ G ノ Bild デアルト共ニ、又 Abbildung ヲ表スモノト考ヘラレル 従テ G ノ p^{n-2} 次ノスベテノ subgroup ヲ求メルニハ、$_n\mathfrak{A}_i(\lambda) = {}_{n-1}\mathfrak{A}_j(\lambda)$ ヲ考察スレバ得ルコトガ出来ル。此ノ考察ノ結果ハ次ノ通リ

$$\left[\begin{array}{c|c} E_i & 0 \\ \hline \lambda_1 \ \lambda_i & 0 \\ \hline 0 & E_{n-i-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} E_j & 0 \\ \hline \mu_1 \ \mu_j & 0 \\ \hline 0 & E_{n-j-2} \end{array}\right]$$

$$= \begin{cases} \left[\begin{array}{c|c|c} E_i & 0 & 0 \\ \hline \mu_1 \ \mu_j & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{i-j-1} & 0 \\ \hline \Lambda_1 \ \Lambda_j & \lambda_{j+2} \ \lambda_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_{n-i-1} \end{array}\right] & i > j \qquad \text{(i)} \\ & \left(\begin{array}{l} j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n-2 \\ i = 1, 2, \cdots\cdots, n-1 \end{array}\right) \\ \Lambda_k = \lambda_k + \mu_k \lambda_{j+1} & \\ \left[\begin{array}{c|c|c} E_i & 0 & 0 \\ \hline \lambda_1 \ \lambda_i & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{j-i} & 0 \\ \hline \mu_1 \ \mu_i & \mu_{i+1} \ \mu_j & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_{n-j-2} \end{array}\right] & i \leq j \qquad \text{(ii)} \\ & \left(\begin{array}{l} i = 0, 1, \cdots\cdots, n-2 \\ j = 0, 1, \cdots\cdots, n-2 \end{array}\right) \end{cases}$$

之ニヨッテ p^{n-1} 次ノ subgroup ノ中ニアル p^{n-2} 次ノ subgroup ハ $p^{n-2}+p^{n-3}+\cdots\cdots+p+1$ 個アルガ、次ノ二様ナ形ヲモツコトガ分ル。

(A) $_n\mathfrak{A}_i(\lambda)$ ニ含マレル subgroup

(i) ノ形ノモノガ $p^{i-1}+\cdots\cdots+p+1$ 個；(i) デ μ ヲ任意ニトランデヨイ。(λ ハ given) ノデ、μ ト mod p ノ完全剰余系ノ値ヲ與ヘテ p^i 個ノ group ヲ得ルガ、$i > j \geq 0$、(<u>$i \neq 0$</u>. <u>$i=0$ ノトキハナイ</u>)

(ii) ノ形ノモノガ $p^{n-2}+\cdots\cdots+p^{i+1}+p^i$ 個；(ii) μ ニ mod p ノ値ヲ與ヘテ得ル。$i \leq j \leq n-2$

($i=0$ ノ瑪合ヲ含ム。)

以上ノ結果ヨリ subgroup ノ Hasse ノ Diagram ヲ書ク時上ヨリ下ヘノ線ガ引ケル. 次ニ下ヨリ上ヘノ線ノ引キ方ヲ考ヘル。

一ツノ order p^{n-2} ノ subgroup ノ形ハ次ノ如シ

$$(*)\quad \left[\begin{array}{c|c|c} E_k & 0 & 0 \\ \hline a_1 \ \ a_k & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{l-k} & 0 \\ \hline b_1 \ \ b_k & b_{k+1} \ \ b_l & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_{n-l-2} \end{array}\right]$$

$\left\{\begin{array}{l} k=0,\ l-k=0,\ l=n-2 \text{ 等ノトキ } E_0 \text{ ガ生レバソノ } E_0 \text{ ノ} \\ \text{位置スル行及列ヲ抹消シテ出来タ Matrix ヲ表ハスモノトスル} \\ \text{例ヘバ } k=l=0 \text{ ノトキ } \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ & & E_{n-2} \end{bmatrix} \\ \text{之ヲ } {}_nl_{k,l}(a,b) \text{ トカク。} \end{array}\right.$

(B) ${}_nl_{k,l}(a,b)$ ヲ含ム subgroup

(B1) 之ガ (i) ノ太象ノ結果ナリトスレバ、$\mu_1=a_1$, $\mu_2=a_2$, $\cdots$ デ $k=j$, $\Lambda_1=b_1$, $\cdots$ $\Lambda_k=b_k$, $\lambda_{k+2}=b_{k+1}$, $\cdots$ $\lambda_i=b_l$ デ $i=l+1$, 即チ ${}_nl_{k,l}(a,b)$ ハ ${}_nl_{l+1}(\lambda)$ ノ subgroup デ λ ハ次ノ如シ

$$\lambda_1=b_1-a_1\lambda,\quad \lambda_2=b_2-a_2\lambda,\cdots \lambda_k=b_k-a_k\lambda,\quad \lambda_{k+1}=\lambda$$
$$\lambda_{k+2}=b_{k+1},\ \cdots\ \lambda_{l+1}=b_l\quad (\lambda \text{ ハ mod } p \text{ ノ任意ノ値})$$

即チ ${}_nl_{k,l}(a,b)$ ハ p 個ノ (λ_i mod p), 斯ノ如キ ${}_nl_{l+1}(\lambda)$ ノ subgroup デアル。

(B2) (ii) ノ太象ノ結果得タ ${}_nl_{k,l}(a,b)$ ナリトスレバ. $\lambda_1=a_1$, $\lambda_2=a_2$, $\cdots$ デ $i=k$, $\mu_1=b_1$, $\mu_2=b_2$, $\cdots$ $\mu_j=b_l$ デ $j=l$, 即チ ${}_nl_{k,l}(a,b)$ ハ ${}_nl_k(\lambda)$ ノ subgroup デ $\lambda_1=a_1,\cdots,$ $\lambda_k=a_k$. 即チ斯ノ如キ1個ノ ${}_nl_k(\lambda)$ ノ subgroup デアル。
即チ

Satz 3. ${}_nl_i(\lambda)$ ノ subgroup ハ (i)(ii) ノ形デアル。

(*) ヲ subgroup トスル order p^{n-1} ノ subgroup ハ次ノ何レカノ形デアル。

$$\left[\begin{array}{c|c} E_{l+1} & 0 \\ \hline b_1-a_1\lambda, \cdots, b_k-a_k\lambda, \lambda, b_{k+1}, \cdots\ b_l & 0 \\ \hline 0 & E_{n-l-2} \end{array}\right] \quad \text{ノ} \sim \text{スハ}$$

(λ mod p 値)

$$\left[\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline a_1 \quad a_k & 0 \\ \hline 0 & E_{n-k-1} \end{array}\right]$$

コノ結果ヨリ, Hasse ノ diagram デ下ヨリ上ヘノ線ハ一ツノ subgroup ヨリ $p+1$ 個ヅヽノ線ガ出テヰルコトガ分ル。コノ $p+1$ 個ノ線ニツキ次ノコトガイヘル。
記述ヲ簡単ニスルタメ次ノ言葉ヲ使タ。

Def. Hasse ノ diagram デ p^k 次ノ subgroup ヲ表ハス点ヲ k 点トイフ。アル k 点ニ含マレル $k-1$ 点ヲソノ k 点ノ下ノ $k-1$ 点, モトノ k 点ヲソノ $k-1$ 点ノ上ノ k 点ト呼ブ。

Satz 4. アル一ツノ $n-1$ 点 A ノ下ノ $n-2$ 点ヲスベテトリ, 之ヲ $B_1, B_2, \cdots\cdots$ トスル時 $B_1, B_2, \cdots\cdots$ ノ上ノ $n-1$ 点ヲスベテトレバ之等ノ $n-1$ 点ハ A 以外ニ共通ノ点ナク, G ノスベテノ $n-1$ 点ハ之デ盡クサレル。

(証) 今 $n-1$ 点 A ガ $\left[\begin{array}{c|c} E_i & 0 \\ \hline \lambda_1 \quad \lambda_i & 0 \\ \hline 0 & E_{n-i-1} \end{array}\right]$ デ表ハサレルトキ

ソノ下ノ $n-1$ 点ハ (i) 又ハ (ii) ノ何レカノ形デアル。

[(i) デハ $i > j$, (ii) デハ $i \leqq j$]

(ii) ノ形ナリトスレバコノ上ノ $n-1$ 点ハ (B1) 及 (B2) ヨリ

$$\left[\begin{array}{cc} E_i & 0 \\ \lambda_1 \ \lambda_i & 0 \\ 0 & E_{n-i-1} \end{array}\right] \equiv A \text{ 又ハ } \left[\begin{array}{c|c} E_{j+1} & 0 \\ \hline \mu_1-\lambda_1 x \cdots \mu_i-\lambda_i x,\ x,\ \mu_{i+1} \cdots \mu_j & 0 \\ \hline & E_{n-j-2} \end{array}\right]$$

$$\equiv A_{j,x} \quad (i \leqq j)$$ ($i=j$ ノトキハ $\mu_{i+1} \cdots\cdots \mu_j$ ノ列ヲ消ス。 x ハ mod p ノ値)

之等ニ点 A 以外ニ $A_{j,x}$ ノ間ニ共通ノモノヽナイコトハ同ジ j ノ値ニツキ $A_j x = A_j x'$ ナリトスレバ,
$\mu_1-\lambda_1 x \equiv \mu_1-\lambda_1 x' \cdots\cdots \mu_i-\lambda_i x \equiv \mu_i-\lambda_i x'$, $x \equiv x'$ ヨリ明デアリ, 異ル j ノ値 j, j' $(j<j')$ ニツキ $A_j x = A_{j'} x$

トスレハ，$A_{j,x}$ ノ中ノ生成元 $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ ($j+2$ 行) ガ $A_{j',x'}$ = 含マレテヰナイ ⓐ コトヨリ明デアル．

次ニ (ii) ノ形ナリトスレバ，コノ上ノ $n-1$ matrix ハ (B1) 及 (B2) ヨリ

$$\begin{bmatrix} E_i & & 0 \\ \Lambda_1-\mu_1 x \cdots \Lambda_j-\mu_j x,\ x,\ \lambda_{j+2} \cdots \lambda_i & & 0 \\ 0 & & E_{n-i-1}\end{bmatrix} \equiv A^{\Lambda}_{i,x} \qquad (i>j)$$

x i mod p

$(\Lambda_k = \lambda_k + \mu_k \lambda_{j+1})$

又ハ

$$\begin{bmatrix} E_j & 0 \\ \mu_1 \cdots \mu_j & 0 \\ 0 & E_{n-j-1}\end{bmatrix} \equiv A^{\mu}_j \qquad (i>j)$$

$i>j$ ダカラ之等ガ前ノ $A_{j,x}$ ト共通ノモノナキコト明 (ⓢ ト [illegible] 又 [illegible]) [illegible] A_j ト $A_{i,x}$ トノ間ニモ共通ノモノナク A^{μ}_j 同志ノ間ニモ 各 μ = mod p ノ完全剰餘系ノ値ヲ與ヘレバ同ジモノナシ $A^{\Lambda}_{i,x}$ ノ間＝(異ル又ハ同一ノ j ニツキ) 同ジモノアレハ $\Lambda_s = \lambda_s + \mu_s \lambda_{j+1}$，$\Lambda'_t = \lambda_t + \mu'_t \lambda_{k+1}$ $(j<k)$ トスルトキ

$$\left\{\begin{aligned}
&\Lambda_1 - \mu_1 x \equiv \Lambda'_1 - \mu'_1 x' \\
&\Lambda_2 - \mu_2 x \equiv \Lambda'_2 - \mu'_2 x' \\
&\qquad \vdots \\
&\Lambda_j - \mu_j x \equiv \Lambda'_j - \mu'_j x' \\
\text{ⓢ}\quad & x \equiv \Lambda'_{j+1} - \mu'_{j+1} x' \\
&\lambda_{j+2} \equiv \Lambda'_{j+2} - \mu'_{j+2} x' \\
&\qquad \vdots \\
&\lambda_k \equiv \Lambda'_k - \mu'_k x' \\
\text{ⓣ}\quad & \lambda_{k+1} \equiv x' \\
&\lambda_{k+2} \equiv \lambda_{k+2} \\
&\qquad \vdots \\
&\lambda_i \equiv \lambda_i
\end{aligned}\right.$$

即 ⓣ ヨリ $x' = \lambda_{k+1}$

ⓢ ＝代入シテ

$x = \lambda_{j+1}$

即コノ合同式ハ

$\lambda_1 \equiv \lambda_1, \cdots ; \lambda_i \equiv \lambda_i$

トナリ $A^{\Lambda}_{i,x}$ ノ間＝共通ノモノアレバ A ＝限ルコトヲ示ス。実際 $x = \lambda_{j+1}$ ＝対シテ A ガ共通ナモノナル事明。

以上ニヨリ $B_1, B_2, \cdots$ 等ノ各ノ上ノ $n-1$ 点ヲトレバ始メノ A 以外ニ共通ノ点ナシ。従テ $p^{n-2}+\cdots+p+1$ 個ノ各点ニツキ A 以外ニ新シキ $n-1$ 点ガ p 個ヅヽ出ルカラ（$B1$ 及 $B2$）計

$$p(p^{n-2}+\cdots+1)=p^{n-1}+\cdots+p$$

個ノ互ニ異ル B ノ上ノ $n-1$ 点ガ出ル。之ニ A ヲ加ヘテ $p^{n-1}+\cdots+p+1$ 個ノ $n-1$ 点ガ出ルガ之ハ $n-1$ 点ノ総数デアル。q.e.d.

今述ベタ B_i ノ上ノ p 個ノ A 以外ノ $n-1$ 点ハ次ニ述ベル Satz 5 及 6 ノ意味ニ於テ組ヲ作ル。

Satz. 5 一ツノ $n-1$ 点 A ノ下ノ $n-2$ 点ヲ B_i $(i=1,2,\cdots,p^{n-2}+\cdots+p+1)$ トスル時各 B_i ノ上ノ $n-1$ 点ノ A 以外ノモノ p 個ノ集合ヲ $\mathfrak{L}_i$ トスル。任意ノ $n-1$ 点 A_j $(A_j\neq A)$ ヲトリ、其ノ下ノスベテノ $n-1$ 点ヲ B_k^j $(k=1,2,\cdots,p^{n-2}+\cdots+p+1)$ トスレバ

(イ) B_i ト B_k^j トノ間ノ共通点ハ唯一ツ　コノ共通点ヲ B_l ト名付ケ $\mathfrak{L}_l$ ノ下ノ点トスル。

(ロ) B_l 以外ノ一点 B_k^j ノ上ノ $n-1$ 点ハ A ト $\mathfrak{L}_l$ ヲ除イタ他ノ $\mathfrak{L}_i$ ノ各組ヨリ唯一ツヅヽ選ビ出シ，之ニ A_j ヲ加ヘルコトニヨリスベテ得ラレル。

(証) A_j ハ Satz 4 ニヨリアル i ニツキ B_i ノ上ニアル。今 B_l ノ上ニ A_j ガアルトスレバ (イ)ニイフ B_i ト B_k^j ノ共通点ハ B_l デアル。今 A_j ガ更ニ B_s $(s\neq l)$ ノ上ニアルトスレバ，Satz 4 ニ反ス。（異ル B_i ノ上ノ共通点ハ A 以外ニナイノデ）$\mathfrak{L}_m$ —(イ)ノ証終—

—(ロ)ノ証— A_j ノ下ノ二点 B_k^j, $B_{k'}^j$ ガ $k\neq k'$ ノトキ同一ノ上ノ点ヲモタヌコトハ Satz 4 ヨリ明

次ニ A ノ下ノ点 B_m ノ上ノ点ノ集合 $\mathfrak{L}_m$ ノ点ヲ $A_1^m, A_2^m, \cdots, A_p^m$ トスルトキ A_j ノ下ノ点 B_k^j ガ A_1^m ノ下ノ点デアリ同時ニ A_2^m ノ下ノ点デアルトスレバ（図参照），A_1^m ヲ Satz 4 ノ A トシテ考ヘレバ A_1^m ノ下ノ点 B_m, B_k^j ガソノ

上ノ点トシテ A_i^{m} ヲ入レタトキニ A_2^{m} ヲモツコトトナリ Satz 4 ニ反ス。即 B_k^j ハ各組 $\mathfrak{L}_m$ ヨリ少クトモ一点ノミヲソノ上ノ点トスル，且，假設ヨリ A ノ下ノ点ハ B_i デ盡シテヰルカラ B_k^j ハ A ノ下ニナク又 $A_j \in \mathfrak{L}_l$ ヨリ B_k^j ハ $\mathfrak{L}_l$ ノ点ノ下ニナイ。($\mathfrak{L}_l$ ノ点ハ A_j ノ下ノ点 B_l ノ上ニアル) 従テ各 B_k^j ハ A ト $\mathfrak{L}_l$ ヲ除ク他ノ $\mathfrak{L}_i$ ノ各組ヨリ唯一ツヅツ選ンダ各点ノ下ニアル。 —(ロ)ノ証終—

(カヽル $\mathfrak{L}_i$ ノ組ノ数ハ $[p^{n-1}+p^{n-2}+\cdots+p+1-(p+1)]\div p=p^{n-2}+\cdots+p$)

Satz 6. $n-1$ 点 A ヲ不動ナラシメル G ノ Automorphismen-gruppe ノ automorphism ニヨリ起ル $n-1$ 点ノ間ノ permutation ニ於テ $\{\mathfrak{L}_i\}$ ハ一ツノ imprimitive ナ system ヲ作ル。

(証) A ヲ不変ナラシメル automorphism ($\mathfrak{U}$ ト呼ブ) ニヨリ A ノ下ノ点 $B_1, B_2, \cdots, B_{p^{n-2}+\cdots+p+1}$ ハ之等相互ノ間ノミデ permutation ガ行ハレ他ノ $n-2$ 点 B_k^j (前ノ Satz ノ記号襲用) ト之等ノ B_i トノ間ニ permutation ハ行ハレナイ。(若シ行ハレル時ハ A ハ不変デナイ A ノ下ノ $n-2$ 点ハ $\{B_i\}$ ソノ全部ナノデ) 従テ $\mathfrak{U}$ ニヨリ B_i $(i=1,2,\cdots,p^{n-2}+\cdots+p+1)$ ガ不変ナラバ $\mathfrak{L}_i$ ノ $n-1$ 点ノミノ間ニ permutation ガ行ハレ B_i ガ B_j ニ permute サレル時ハ $\mathfrak{L}_i$ ノ $n-1$ 点ハ $\mathfrak{L}_j$ ノ $n-1$ 点全体ト permute サレル。即各 $\mathfrak{L}_i$ ハ $\mathfrak{U}$ ニヨル $n-1$ 点ノ permutation デ一ツノ imprimitive ナ system ヲ作ル。 q. e. d.

コノ Satz 6. ニヨリアトデ報告スル様ニ G ノ Automorphismen-gruppe ノ Darstellung ヲ考ヘルコトガ出来ル。

扨 Hasse ノ diagram ヲ書ク(組立ヲ考ヘル)ニハ $n-1$ 点ト $n-2$ 点トノ上下ノ連結状態ガ Satz 3. 4. 5 ニヨリ分ルノデ之ヲ次々ニツギ合セテ行ケバヨイカ，一ツノ $n-1$ 点ノ下ノ $n-2$ 点ノ上ノ $n-1$ 点ノミデ $n-1$ 点ガ盡クサレルト云フ Satz 4 ニ相當シテ如何ナル $n-1$ 点ノ下ノ $n-2$ 点デスベテノ $n-2$ 点ガ盡クサレルカニツキ次ノコトガ云ヘル。蓋シ Abelian group ノ dualism ニヨリ G ノ $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 点 ([ ] ハ gauss ノ記号) マデヲ書ケバアトハ ? ，，逆ノ形デ連結サレテヰル筈デアルカラ上，下ヲ

反對ニシタ事ヲ Satz 4 デ考ヘテオクル要ガアルノデアル、即、

次ノ $n-1$ 点ノ下ノ $n-2$ 点デスベテノ $n-2$ 点ハ盡サレル。($\mathfrak{A}_i(\lambda)$ トシテ λ ニ mod p ノ値ヲ與ヘタスベテノ $\mathfrak{A}_i(\lambda)$ ヲトルトキ)

$$\mathfrak{A}_0(\lambda),\ \mathfrak{A}_1(\lambda),\ \cdots\ \mathfrak{A}_{n-2}(\lambda)$$

即下ニスヘテノ $n-2$ 点ヲモツ殊ナ $n-1$ 点ノ組ハ他ニモトレルガ、$n-1$ 点ノ中 $\mathfrak{A}_{n-1}(\lambda)$ ヲ除イタモノデ盡クサレルノデアル。之ハ前ノ (iii) ヲ参照スレバスグ分ルコトデアル。

扨次ニ G ノ Automorphism ニヨル G ノ $n-1$ 点ノ permutation ヲ考ヘル。　　　　(以下次回)